**Оксана Яцинич**

**Дрогобич, Україна**

**ДЕЯКІ ЦІКАВІ ЙМОВІРНІСНІ ЗАДАЧІ**

Задача може бути цікавою з багатьох причин:

* цікавий зміст умови;
* інтуїтивно незрозуміла можлива відповідь;
* задача ілюструє важливий принцип;
* задача є важкою;
* в розв'язанні схована «родзинка»;
* відповідь елегантна і проста
* тощо.

В теорії ймовірностей є багато цікавих задач. Розглянемо декілька таких задач. Слід зауважити, що математичний рівень цих задач різний.

1. ***Шухляда зі шкарпетками.***

У шухляді лежать червоні і чорні шкарпетки. Якщо навмання виймають дві шкарпетки, то ймовірність того, що обидві шкарпетки червоні, дорівнює ½.

а) Яка мінімально ймовірна кількість шкарпеток у шухляді?

б) Яка мінімально можлива кількість шкарпеток у шухляді, якщо кількість чорних шкарпеток парна?

Розв’язування:

Нехай у шухляді *m* червоних і *n* чорних шкарпеток. Ймовірність того, що навмання взята шкарпетка буде червоною, дорівнює . Умовна ймовірність того, що друга навмання взята шкарпетка буде червоною, рівна .



Оскільки за умовою задачі ймовірність того, що обидві вийняті із шухляди шкарпетки червоні, дорівнює ½, то = . Можна провести розрахунки, підставляючи різні значення *n* (1, 2 тощо) і обчислити відповідні значення *m*.



Якщо підійти на більш складному математичному рівні, то розрахунки будуть такими:

при n, тому має місце нерівність



.



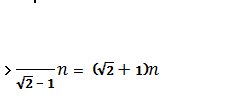
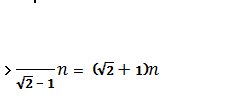
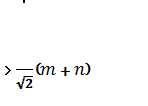
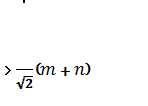
Якщо добути квадратний корінь при *m*, то



.



Звідси *m* або *m*.



*m* -1, тому *m* .



При отримаємо 2,424 3,414, тому можна взяти . Отже, при маємо ймовірність того, що обидві шкарпетки будуть червоними, Р = = .



Таким чином, мінімальна кількість шкарпеток буде рівна 4.

Тепер розглянемо парні значення  *n.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *n* | між |  | Р  (обидві шкарпетки червоні) |
| 2 | 5,8; 4,8 | 5 |  |
| 4 | 10,7; 9,7 | 10 |  |
| 6 | 15,5; 14,5 | 15 |  |

Мінімальна кількість шкарпеток у шухляді буде 21 за умови, що *n* – парне число.

1. ***Парні дні народження.***

За якої мінімальної кількості людей в компанії ймовірність того, що хоча б двоє народилися в один і той же день, не менша за ½ (роки народження можуть бути різними).

В таких задачах вважають, що 29 лютого не може бути днем народження, а решті днів року відповідає однакова ймовірність.

Спочатку варто розглянути більш загальну задачу. Нехай N – кількість рівноймовірних днів, r – кількість людей. Обчислимо ймовірність того, що всі ці люди народилися в різні дні. В такий спосіб знайдемо ймовірність того, що хоча б дві людини народилися в один і той самий день.

Для першої людини є N можливих днів, для другої – (N –1), які не співпадають з днем народження першої, для третьої - (N –2), які відмінні від днів народжень перших двох, для r–ої людини існує (N – r +1) можливість. Загальна кількість варіантів, при яких немає однакових днів народжень, дорівнює N (N –1)… (N – r +1) (всіх r множників). (1)

Для визначення потрібної ймовірності потрібно знайти ще загальне число всіх можливих розміщень днів народжень. Для кожної людини існує рівно N можливих днів, загальна кількість різних розподілів днів народжень r людей дорівнює (2)



Оскількі всі дні рівноймовірні, то шукана ймовірність рівна відношенню (1) і (2).

Тому ймовірність того, що є хоча б два однакових дня народження , рівна

= 1 – . (3)



При великих значеннях таких, як 365, розрахунки є дуже громіздкими, тому можна використати таблицю логарифмів, записавши шукану ймовірність у вигляді . Тоді після певних розрахунків отримаємо наступне: ймовірність хоча б одного співпадання для народжень складає 0,5073 при r = 23 і 0,4757 при r = 22. Тому найменша кількість людей буде 23.



1. ***Послідовні виграші.***

Щоб підбадьорити сина, який робить успіхи у грі в теніс, батько обіцяє йому приз, якщо син виграє поспіль бодай дві тенісні партії проти батька і клубного чемпіона за однією зі схем: батько-чемпіон-батько або чемпіон-батько-чемпіон за вибором сина. Чемпіон грає краще за батька. Яку схему слід вибрати синові?

Друга партія є основною, бо син не може виграти два рази поспіль, якщо не буде виграшу у другій грі. Оскільки чемпіон грає краще за батька, то синові потрібно грати з ним менше партій. Введемо позначення : С – чемпіон, F – батько, В – виграш сина, П – програш сина, с – ймовірність того, що він виграє у чемпіона, f – ймовірність того, що він виграє у батька. Виграші сина є незалежними, тому можливі результаті і їхні ймовірності можна навести в наступних таблицях.

Схема FСF Схема СFС

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| F | С | F | Ймовірність | С | F | С | Ймовірність |
| В | В | В | fсf | В | В | В | сfс |
| В | В | П | fс(1- f) | В | В | П | сf(1-с) |
| П | В | В | (1- f)сf | П | В | В | (1-с)fс |
| Загальна ймовірність | | | fс(2- f) | Загальна ймовірність | | | fс(2- с) |

Оскільки батько грає гірше за чемпіона, то f с, 2 - f 2 – с, тому синові потрібно вибрати варіант СFС.

1. ***Чи вийде другий у фінал?***

В тенісному турнірі беруть участь вісім гравців. Номер, який навмання витягає гравець, визначає його положення в турнірній драбинці. Кращий гравець перемагає другого за майстерністю, натомість другий перемагає всіх решту. Той, хто програє у фіналі, займає друге місце. Яка ймовірність того, що це місце займе другий за майстерністю гравець?

І *тур*

***1 ІІтур***

***2 фінал***

***3***

***4 переможець***

***5***

***6***

***7***

***8***

***Турнірна драбинка для 8 учасників***

Другий за майстерністю гравець може зайняти друге місце лише в тому випадку, якщо він знаходиться в половині турнірної драбинки, яку не займає кращий гравець.

Якщо в турнірі беруть участь 2n гравців, то в половині турнірної драбинки, яку не займає кращий гравець, є початкових ступенів, а всього є 2n – 1 початкових ступенів (крім зайнятих кращим гравцем). Таким чином, в турнірі з 2n гравцями другий за майстерністю гравець може з ймовірністю зайняти друге місце.



***Перелік використаних джерел :***

1. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2006. – 424 с.
2. Зайцев Є. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч.посібник. – К.: Алерта, 2013. – 460 с.
3. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб./ О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк. – К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с.